数理解析研究所講究録
第2012巻 2016年 94-114

Computations of Siegel modular forms with respect to non-split symplectic groups

和歌山大学教育学部　北山 秀隆 *
Hidetaka Kitayama
Department of Mathematics, Faculty of Education
Wakayama University

1 はじめに

これは，2015 年 10 月 1 日に行われた京都大学数理解析研究所における講演 "Computations of Siegel modular forms with respect to non-split symplectic groups" の内容に基づく報告である。内容は，次の 3 つの論文からなる伊吹山知義氏との共同プロジェクトの一部である。

(1) H. Kitayama, *An explicit dimension formula for Siegel cusp forms with respect to the non-split symplectic groups*, Journal of the Mathematical Society of Japan **63** (2011), 1263–1310.

(2) H. Kitayama, *On the graded ring of Siegel modular forms of degree two with respect to a non-split symplectic group*, International Journal of Mathematics **23** (2012).

(3) T. Ibukiyama and H. Kitayama, *Dimension formulas of paramodular forms of squarefree level and comparison with inner twist*, Journal of the Mathematical Society of Japan, accepted.

この共同プロジェクトは，アイヒラーが 1950 年代に証明した所謂アイヒラー対応を 2 次のシンプレクティック群の場合にも記述しようとする研究の流れに属する。歴史的には，この問題は 1960 年代には既に Ihara [8] によって提唱されていて，さらに 1980 年代を中心に Ibukiyama [4], Hashimoto-Ibukiyama [2], Ibukiyama [5], Ibukiyama [6] などにおいて詳しく考察されてきた。特に，[2], [5], [6] では，明示的次元公式の比較による次元の一致定理の証明という方針で，$Sp(2)$ の場合の対応予想の記述に成功している。特にパラモジュラー群の場合には，[5], [6] において素数レベルの場合に限っては対応予想が既に提唱されていたが，レベルの拡張の研究は行われていなかった。上記論文 (1), (2) を準備として，論文 (3) はこれを平方因子を持たないレベルにまで拡張したものである。

* E-mail: hkitayam@center.wakayama-u.ac.jp

本稿は，上記 3 論文の中から，“non-split symplectic groups” に関するジーゲルモジュラー形式についての明示的計算に該当する幾つかの結果を取り出してまとめ直したものである。紙数の都合でほとんどの定理に証明は付けていないが，文献を挙げてあるので必要であれば参照して頂きたい。

2 準備

2.1 ジーゲルモジュラー形式

$Sp(2;\mathbb{R})$ を 2 次シンプレクティック群とする：

$$Sp(2;\mathbb{R}) = \left\{ g \in GL(4,\mathbb{R}) \;\middle|\; g \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -1_2 & 0_2 \end{pmatrix} {}^t g = \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -1_2 & 0_2 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\mathfrak{H}_2$ を 2 次のジーゲル上半空間，すなわち

$$\mathfrak{H}_2 = \{ Z \in M(2;\mathbb{C}) \mid {}^t Z = Z,\ \mathrm{Im}(Z) \text{ は正定値 } \}$$

とする。このとき，群 $Sp(2;\mathbb{R})$ は $\mathfrak{H}_2$ に

$$\gamma \cdot Z := (AZ+B)(CZ+D)^{-1}, \qquad \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(2;\mathbb{R}), \quad Z \in \mathfrak{H}_2$$

により作用する。Γ を $Sp(2;\mathbb{R})$ の離散部分群で $\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathfrak{H}_2) < \infty$ なるものとし，$\rho_{k,j} : GL(2;\mathbb{C}) \to GL(j+1;\mathbb{C})$ を符号 $(j+k,k)$ $(k,j \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ の既約有理表現，すなわち，$\rho_{k,j} = \det^k \otimes \mathrm{Sym}_j$ とする。ただし，Sym_j は $GL(2;\mathbb{C})$ の j 次対称テンソル表現を表す。このとき，Γ に関するウェイト $\rho_{k,j}$ のジーゲルモジュラー形式とは，次の条件

(i) $f(\gamma \cdot Z) = \rho_{k,j}(CZ+D) f(Z), \qquad \text{for } \forall \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma,\ \forall Z \in \mathfrak{H}_2,$

を満たす正則関数 $f : \mathfrak{H}_2 \to \mathbb{C}^{j+1}$ のことである。また，Γ に関するウェイト $\rho_{k,j}$ のジーゲルカスプ形式とは，次の条件

(ii) $\left|\rho_{k,j}(\mathrm{Im}(Z)^{1/2}) f(Z)\right|_{\mathbb{C}^{j+1}}$ は $\mathfrak{H}_2$ 上有界 （ここで，$|u|_{\mathbb{C}^{j+1}} := ({}^t u \overline{u})^{\frac{1}{2}}$ for $u \in \mathbb{C}^{j+1}$）

を満たすジーゲルモジュラー形式のことである。Γ に関するウェイト $\rho_{k,j}$ のジーゲルモジュラー形式すべての集合を $M_{k,j}(\Gamma)$，ジーゲルカスプ形式すべての集合を $S_{k,j}(\Gamma)$ と表すとき，これらは $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間となっている。

2.2 Non-split symplectic groups

B を $\mathbb{Q}$ 上の不定符号四元数環とし，B の canonical involution を $^-$ で表す。写像 $f : B^2 \times B^2 \to B$ を

$$f(x,y) = x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_1}, \quad x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in B^2$$

で定義すると，B^2 上の任意の非退化四元数的エルミート形式は f に同値である (cf. [12])。この f についてのエルミート空間 (B^2, f) に関するユニタリ群として群 $U(2;B)$ を定義する。

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{Q}} = U(2;B) &= \{g \in GL(2;B) \mid f(xg, yg) = f(x,y) \text{ for } \forall x, y \in B^2\} \\ &= \left\{ g \in GL(2;B) \;\middle|\; g\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} {}^t\overline{g} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

ここで ${}^t\overline{g}$ は，$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して ${}^t\overline{g} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}$ を表す。B は不定符号なので $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq M(2;\mathbb{R})$ である。この同型写像を一つ固定することにより，B を $M(2;\mathbb{R})$ の部分環と同一視し，$G_{\mathbb{R}} \subset M(4;\mathbb{R})$ とみなす。このとき，

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & G_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{\sim} & Sp(2;\mathbb{R}) \\ & \Psi & & \Psi \\ & g & \longmapsto & \gamma^{-1} g \gamma, \end{array} \qquad \gamma := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

により，$G_{\mathbb{R}}$ と $Sp(2;\mathbb{R})$ とは同型になり，$U(2;B)$ は $Sp(2;\mathbb{R})$ の $\mathbb{Q}$ 形式である。実際は，$Sp(2;\mathbb{R})$ の $\mathbb{Q}$ 形式はすべて，適当な不定符号四元数環 B を取ることにより $U(2;B)$ として得られることが知られている (cf. [11])。つまり，この方法で $Sp(2;\mathbb{R})$ の $\mathbb{Q}$ 形式をすべて尽くせるのである。もし B が判別式 1 の不定符号四元数環 $B \simeq M(2;\mathbb{Q})$ ならば，$U(2;B)$ は φ により $Sp(2;\mathbb{Q})$ と同型であり，この $\mathbb{Q}$ 形式に含まれる離散群についてのジーゲルモジュラー形式は理論も計算も盛んである。一方で，B が判別式が 1 でない不定符号四元数環の場合には，$U(2;B)$ は $Sp(2;\mathbb{Q})$ とは異なる $\mathbb{Q}$ 形式を与えることになる。タイトルで仮に "non-split symplectic groups" と呼んでいるのはこの場合のことである。

では，"non-split symplectic groups" の場合に本稿で扱う離散群の定義を述べる。本稿ではある種の特別な場合のみを記述するので，もっと一般の場合については [3], [7], [9], [10], [13] などを参照されたい。B を判別式 $N > 1$ の $\mathbb{Q}$ 上の不定符号四元数環とし，$\mathfrak{O}$ を B の極大整数環とする。B は不定符号であるので，$\mathfrak{O}$ は $B^{\times}$-共役を除いて一意的である。$\mathfrak{O}$ の極大両側イデアル $\mathfrak{A}$ を

$$\begin{cases} p \mid N \text{ なる素数 } p \text{ に対しては } \mathfrak{A}_p = \pi\mathfrak{O}_p, \\ p \nmid N \text{ なる素数 } p \text{ に対しては } \mathfrak{A}_p = \mathfrak{O}_p \end{cases}$$

という条件によって定めることができる。ここで π は $\mathfrak{O}_p$ の素元を表す。以上の記号のもと，群 $U'(N)$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} U'(N) &:= \{g \in U(2;B) \mid (\mathfrak{A}, \mathfrak{O})g = (\mathfrak{A}, \mathfrak{O})\} \\ &= \begin{pmatrix} \mathfrak{O} & \mathfrak{A}^{-1} \\ \mathfrak{A} & \mathfrak{O} \end{pmatrix}^{\times} \cap U(2;B). \end{aligned}$$

φ による同一視によって $U'(N)$ を $Sp(2;\mathbb{R})$ の離散部分群とみなすことができるので，$U'(N)$ に関するジーゲルモジュラー形式の空間 $M_{k,j}(U'(N))$, ジーゲルカスプ形式の空間 $S_{k,j}(U'(N))$ を考えることができる。これの計算をしようというのがタイトルの意味である。以下，次の内容を扱う。

第３節　明示的次元公式
第４節　モジュラー形式の構成，特に次数環の構成
第５節　リフティングの予想とその数値的根拠

3　明示的次元公式

ここで明示的次元公式とは，ウェイトや離散群の情報の入力に対してカスプ形式の空間の次元の「数値」を返す明示公式のことを言う。一般に，セルバーグ跡公式やリーマン-ロッホの定理によって明示的次元公式が導出できるという事実自体は良く知られているが，ジーゲルカスプ形式の場合に実際にそれを実行しようとすると様々な困難が伴い，証明も煩雑な考察を必要とするため，まだまだ知られていない場合が多い。明示的次元公式は，後で述べる具体的計算において本質的に役割を果たすものであるため，まずここで定理 3.1 として書いておく。なおこれは，筆者自身の論文 [9] の特殊なものである。

まず記号を準備する。我々は不定符号の四元数環を考えているので，その判別式 N は偶数個の異なる素数の積である。N を偶数個の異なる素数の積とし，N の素因子の個数を $\omega(N)$ と表す。また，自然数 m, n に対して，$N(m;n) := \{p \mid N\ ;\ p \equiv m \bmod n\}$ と表す。$[a_0, \ldots, a_{m-1}; m]_n$ は n に関する周期的関数で，例えば

$$[1,-1,0;3]_j = \begin{cases} 1 & \text{if } j \equiv 0 \bmod 3 \\ -1 & \text{if } j \equiv 1 \bmod 3 \\ 0 & \text{if } j \equiv 2 \bmod 3 \end{cases}$$

のように $n \equiv i \bmod m$ のとき a_i を値として持つものと定義する。また，k, j についての関数

$$C_3(k,j) = [(k-2)(-1)^{j/2}, -(j+k-1), -(k-2)(-1)^{j/2}, j+k-1; 4]_k$$
$$C_4(k,j) = (j+k-1)\cdot[1,-1,0;3]_k + (k-2)\cdot[1,0,-1;3]_{j+k}$$
$$C_5(k,j) = (j+k-1)\cdot[-1,-1,0,1,1,0;6]_k + (k-2)\cdot[1,0,-1,-1,0,1;6]_{j+k}$$
$$C_8(k,j) = \begin{cases} [1,0,0,-1,-1,-1,-1,0,0,1,1,1;12]_k & \cdots \quad \text{if } j \equiv 0 \bmod 12 \\ [-1,1,0,1,1,0,1,-1,0,-1,-1,0;12]_k & \cdots \quad \text{if } j \equiv 2 \bmod 12 \\ [1,-1,0,0,-1,1,-1,1,0,0,1,-1;12]_k & \cdots \quad \text{if } j \equiv 4 \bmod 12 \\ [-1,0,0,-1,1,-1,1,0,0,1,-1,1;12]_k & \cdots \quad \text{if } j \equiv 6 \bmod 12 \\ [1,1,0,1,-1,0,-1,-1,0,-1,1,0;12]_k & \cdots \quad \text{if } j \equiv 8 \bmod 12 \\ [-1,-1,0,0,1,1,1,1,0,0,-1,-1;12]_k & \cdots \quad \text{if } j \equiv 10 \bmod 12 \end{cases}$$
$$C_9(k,j) = \begin{cases} [1,0,0,-1,0,0;6]_k & \cdots \quad \text{if } j \equiv 0 \bmod 6 \\ [-1,1,0,1,-1,0;6]_k & \cdots \quad \text{if } j \equiv 2 \bmod 6 \\ [0,-1,0,0,1,0;6]_k & \cdots \quad \text{if } j \equiv 4 \bmod 6 \end{cases}$$
$$C_{10}(k,j) = \begin{cases} [1,0,0,-1,0;5]_k & \cdots \quad \text{if } j \equiv 0 \bmod 10 \\ [-1,1,0,0,0;5]_k & \cdots \quad \text{if } j \equiv 2 \bmod 10 \\ 0 & \cdots \quad \text{if } j \equiv 4 \bmod 10 \\ [0,0,0,1,-1;5]_k & \cdots \quad \text{if } j \equiv 6 \bmod 10 \\ [0,-1,0,0,1;5]_k & \cdots \quad \text{if } j \equiv 8 \bmod 10 \end{cases}$$

$$C_{11}(k,j)=\begin{cases}[1,0,0,-1;4]_k & \cdots \quad \text{if } j\equiv 0 \bmod 8\\ [-1,1,0,0;4]_k & \cdots \quad \text{if } j\equiv 2 \bmod 8\\ [-1,0,0,1;4]_k & \cdots \quad \text{if } j\equiv 4 \bmod 8\\ [1,-1,0,0;4]_k & \cdots \quad \text{if } j\equiv 6 \bmod 8\end{cases}$$

を定義する。

以上の記号を用いて，以下の明示的次元公式が得られる。なお，定理の中で，例えば $H'_5(k,j,N)=0$ など 0 になるものも有るが，それぞれの項が共役類に対応した寄与を表していて意味を持つため，敢えてそのまま記載している。

定理 3.1 ([9])**.** N を偶数個の異なる素数の積とする。このとき，5 以上の整数 k と 0 以上の偶数 j に対し，次が成り立つ。(j が奇数のとき次元が 0 であることは元々明らかである。)

$$\dim S_{k,j}(U'(N))=\sum_{i=1}^{12}H'_i(k,j,N)+\sum_{i=1}^{10}I'_i(k,j,N)$$

ここで、$H'_i(k,j,N)$ $(i=1,\ldots,12)$, $I'_i(k,j,N)$ $(i=1,\ldots,10)$ は以下で与えられる k,j,N に関する関数である。

$$H'_1(k,j,N)=\prod_{p|N}(p^2-1)\cdot 2^{-7}3^{-3}5^{-1}\cdot(j+1)(k-2)(j+k-1)(j+2k-3)$$

$$H'_2(k,j,N)=2^{-7}3^{-2}\cdot(j+k-1)(k-2)(-1)^k\cdot\begin{cases}3 & \textit{if } N=2\\ 0 & \textit{if } N\neq 2\end{cases}$$

$$H'_3(k,j,N)=2^{-5}3^{-1}\cdot C_3(k,j)\cdot\begin{cases}3 & \textit{if } N=2\\ 0 & \textit{if } N\neq 2\end{cases}$$

$$H'_4(k,j,N)=2^{-3}3^{-3}\cdot C_4(k,j)\cdot\begin{cases}8 & \textit{if } N=3\\ 0 & \textit{if } N\neq 3\end{cases}$$

$$H'_5(k,j,N)=0$$

$$H'_6(k,j,N)=H'_{6,1}(N)\times(-1)^{j/2}(2k+j-3)+H'_{6,2}(N)\times(-1)^{j/2+k}(j+1)$$

$$H'_{6,1}(N)=\frac{1}{2^5\cdot 3}\prod_{p|N}(p-\left(\frac{-1}{p}\right))+\frac{1}{2^7\cdot 3}\prod_{p|N}(p\left(\frac{-1}{p}\right)-1)$$

$$H'_{6,2}(N)=\frac{1}{2^5\cdot 3}\prod_{p|N}(p-\left(\frac{-1}{p}\right))-\frac{1}{2^7\cdot 3}\prod_{p|N}(p\left(\frac{-1}{p}\right)-1)$$

$$H'_7(k,j,N)=H'_{7,1}(N)\times[1,-1,0;3]_j(2k+j-3)+H'_{7,2}(N)\times[0,1,-1;3]_{j+2k}(j+1)$$

$$H'_{7,1}(N)=\frac{1}{2^3\cdot 3^2}\prod_{p|N}(p-\left(\frac{-3}{p}\right))+\frac{1}{2^3\cdot 3^3}\prod_{p|N}(p\left(\frac{-3}{p}\right)-1)$$

$$H'_{7,2}(N)=\frac{1}{2^3\cdot 3^2}\prod_{p|N}(p-\left(\frac{-3}{p}\right))-\frac{1}{2^3\cdot 3^3}\prod_{p|N}(p\left(\frac{-3}{p}\right)-1)$$

$$H'_8(k,j,N)=0$$

$$H'_9(k,j,N)=2^{-1}3^{-2}\cdot C_9(k,j)\cdot\begin{cases}3 & \textit{if } N=2\\ 0 & \textit{if } N\neq 2\end{cases}$$

$$H'_{10}(k,j,N) = 2^{\omega(N)-1}5^{-1}\cdot C_{10}(k,j)\cdot\begin{cases} 0 & \textit{if } N(1;5)\cup N(4;5)\neq\emptyset \\ 1 & \textit{if } N(1;5)\cup N(4;5)=\emptyset \textit{ and } 5\mid N \\ 2 & \textit{otherwise}\end{cases}$$

$$H'_{11}(k,j,N) = 2^{-3}C_{11}(k,j)\prod_{p|N,p\neq 2} 2\times\begin{cases} 0 & \textit{if } N(1;8)\cup N(7;8)\neq\emptyset \\ 1 & \textit{if } N(1;8)\cup N(7;8)=\emptyset\end{cases}$$

$$H'_{12}(k,j,N) = H'_{12,1}(N)\times[1,-1,0;3]_j(-1)^{j/2+k}+H'_{12,2}(N)\times[0,-1,1;3]_{j+2k}(-1)^{j/2}$$

$$H'_{12,1}(N) = \frac{1}{2^3\cdot 3}\prod_{p|N}(1-\left(\frac{3}{p}\right))+\frac{1}{2^3\cdot 3}\prod_{p|N}(\left(\frac{-1}{p}\right)-\left(\frac{-3}{p}\right))$$

$$H'_{12,2}(N) = \frac{1}{2^3\cdot 3}\prod_{p|N}(1-\left(\frac{3}{p}\right))-\frac{1}{2^3\cdot 3}\prod_{p|N}(\left(\frac{-1}{p}\right)-\left(\frac{-3}{p}\right))$$

$$I'_1(k,j,N) = 2^{-3}3^{-1}\cdot(j+1)\cdot\prod_{p|N}(p-1)$$

$$\begin{aligned} I'_2(k,j,N) &= I'_3(k,j,N) = I'_4(k,j,N) = I'_5(k,j,N) \\ &= I'_6(k,j,N) = I'_7(k,j,N) = I'_8(k,j,N) = 0\end{aligned}$$

$$I'_9(k,j,N) = -2^{-3}\cdot(-1)^{j/2}\cdot\prod_{p|N}(\left(\frac{-1}{p}\right)-1)$$

$$I'_{10}(k,j,N) = -2^{-1}3^{-1}\cdot[1,-1,0;3]_k\prod_{p|N}(\left(\frac{-3}{p}\right)-1).$$

□

非常に煩雑な公式に見えるが，一つ一つの項は初等的な関数に過ぎず，計算機にとってはもちろん何の計算困難も存在しない。どんな場合も計算できる公式であるが，例として試しに $j=0$, $N=2p$ の場合を計算してみると次の表のようになる。

$\dim_{\mathbb{C}} S_{k,0}(U'(2p))$

$p\backslash k$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	2	2	2	3	4	6	6	8	8	11	13
5	3	4	5	7	9	12	14	18	21	26	31
7	4	5	6	9	12	17	21	27	32	42	51
11	8	12	16	24	31	41	53	68	84	105	127
13	8	11	15	24	33	46	61	80	100	129	159
17	14	21	30	44	61	84	110	143	180	228	281
19	13	21	30	49	67	93	126	166	211	270	333
23	22	34	50	75	105	145	193	252	320	406	502

4 モジュラー形式の構成

この節では，$j=0$ として，$M_{k,0}(U'(N))$ の元を具体的に扱うことを述べる。B を判別式 $N>1$ の不定符号四元数環とし，B の極大整数環 $\mathfrak{O}$，および第 2.2 節のように $\mathfrak{O}$ の極大両側イデアル $\mathfrak{A}$ をとる。$\mathbb{Q}$ 上の 3 次元ベクトル空間 $B^0 := \{x\in B \mid x+\bar{x}=0\}$ の格子 $L_{\mathfrak{A}}$ とその双対格子 $L_{\mathfrak{A}}^*$ を

$$L_{\mathfrak{A}} := B^0 \cap \mathfrak{A}^{-1},\quad L_{\mathfrak{A}}^* := \{y\in B^0 \mid xy+\overline{xy}\in\mathbb{Z} \text{ for } {}^{\forall}x\in L_{\mathfrak{A}}\}$$

で定義する。

命題 4.1 (Arakawa[1], Proposition 10).

(1) $f(Z)\in M_{k,0}(U'(N))$ は次の形のフーリエ展開をもつ：

$$f(Z)=C_f(0)+\sum_{\substack{\eta\in L_{\mathfrak{A}}^*\\ \eta J>0}} C_f(\eta)\mathbf{e}[\mathrm{Tr}(\eta JZ)],\qquad (\mathbf{e}[z]:=e^{2\pi iz})$$

ここで，$J=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)$ とし，$\eta J>0$ は $L_{\mathfrak{A}}^*\subset M(2;\mathbb{R})$ とみなしたときに ηJ が正定値であることを意味する。

(2) $f(Z)\in M_{k,0}(U'(N))$ について，$f(Z)\in S_{k,0}(U'(N)) \Longleftrightarrow C_f(0)=0.$

□

4.1 アイゼンシュタイン級数

Hirai[3] は $M_{k,0}(U'(N))$ におけるアイゼンシュタイン級数 E_k ($k\geq 2$:偶数) を研究し，フーリエ級数の明示公式を得た。(実際にはもう少し一般の群を扱っている。)

$$L_{\mathfrak{A}_{\mathrm{prim}}}^* := \{\eta\in L_{\mathfrak{A}}^* \mid n^{-1}\eta\notin L_{\mathfrak{A}}^* \text{ for } {}^{\forall}n\in\mathbb{Z}_{n>1}\}$$

とおく。$\eta\in L_{\mathfrak{A}}^*$ に対して，$\mathbb{Q}(\eta)/\mathbb{Q}$ の判別式を d_η，ディリクレ指標を χ_η と表す。また，m 番目のベルヌーイ数を B_m，一般ベルヌーイ数を B_{m,χ_η} と表す。また，

$$a_\eta^{-1}\eta\in L_{\mathfrak{A}_{\mathrm{prim}}}^*,\qquad (2a_\eta^{-1}\eta)^2=d_\eta f_\eta^2$$

により正の整数 a_η と正の有理数 f_η を定義し，$a_{\eta,p}=\mathrm{ord}_p(a_\eta)$, $f_{\eta,p}=\mathrm{ord}_p(f_\eta)$ と表す。

命題 4.2 (Hirai[3], Theorem 3.10). k が 2 以上の偶数のとき，アイゼンシュタイン級数 E_k は次のフーリエ展開を持つ：

$$E_k(Z)=1+\sum_{\substack{\eta\in L_{\mathfrak{A}}^*\\ \eta J>0}} C_f(\eta)\mathbf{e}[\mathrm{Tr}(\eta JZ)]$$

ここで，

$$C(\eta) = -\frac{4kB_{k-1,\chi_\eta}}{B_k B_{2k-2}} \prod_{p|N} \frac{1}{p^{k-1}-1} \prod_p F_p(\eta, k)$$

$$F_p(\eta,k) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{t=0}^{a_{\eta,p}} p^{(2k-3)t} - \chi_\eta(p) \sum_{t=0}^{a_{\eta,p}-1} p^{(2k-3)t+k-2} & \cdots if\ p \mid N \\ \displaystyle\sum_{t=0}^{a_{\eta,p}} \left\{ \sum_{l=0}^{a_{\eta,p}+f_{\eta,p}-t} p^{(2k-3)l+(k-1)t} - \chi_\eta(p) \sum_{l=0}^{a_{\eta,p}+f_{\eta,p}-t-1} p^{(2k-3)l+(k-1)t+k-2} \right\} & \\ & \cdots if\ p \nmid N \end{cases}$$

□

4.2 次数環の明示的構成

ここでは，$U'(6)$ に関するジーゲルモジュラー形式のなす次数環 $\bigoplus_{k=0}^{\infty} M_{k,0}(U'(6))$ を明示的に記述する定理を筆者自身の論文 [10] から引用する。なお，non-split の場合に知られている次数環の結果はこれ 1 つのみである。

第 3 節の明示的次元公式（定理 3.1）を $j=0, N=6$ として書き下してみると

$$\dim S_{k,0}(U'(6)) = \frac{4k^3 - 18k^2 + 696k - 1737 + (-1)^k \cdot 225}{1440} + \frac{[0,-1,1;3]_k}{9} + \frac{[1,0,0,-1;4]_k}{4} + \frac{4[1,0,0,-1,0;5]_k}{5}$$

となる。ただし，これが成り立つのは $k \geq 5$ のときのみであり，$k \leq 4$ についてはこのような公式は無いので別の方法で議論せねばならない。詳細は省略するが，[10] において

$$M_{1,0}(U'(6)) = \{0\}, \qquad M_{2,0}(U'(6)) = \mathbb{C}E_2$$
$$M_{3,0}(U'(6)) = \{0\}, \qquad M_{4,0}(U'(6)) = \mathbb{C}{E_2}^2 \oplus \mathbb{C}E_4$$

を示した。また，

$$\begin{array}{ll} M_{k,0}(U'(6)) = S_{k,0}(U'(6)) & \cdots k\text{ が奇数のとき} \\ M_{k,0}(U'(6)) = S_{k,0}(U'(6)) \oplus \mathbb{C}E_k & \cdots k\text{ が偶数のとき} \end{array}$$

であることに注意すると，次元の母関数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dim M_{k,0}(U'(6))t^k = 1 + t^2 + 2t^4 + \sum_{k=5}^{\infty} \dim S_{k,0}(U'(6))t^k + \sum_{k=3}^{\infty} t^{2k}$$
$$= \frac{(1+t^5)(1+t^{15})}{(1-t^2)(1-t^4)(1-t^5)(1-t^6)}$$

を得る。これによって次数環の構造の推測は立つことになる。判別式を大きくすると母関数の形は非常に複雑になってしまうが，判別式 6 の場合だとこの程度に収まって構造や生成元まで完全に決定してしまうことができるのである。これにより第 5.2 節のような数値実験が可能となる。

定理 4.3 ([10]). $U'(6)$ に関するジーゲルモジュラー形式のなす次数環は以下のように与えられる。

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} M_{k,0}(U'(6)) = \mathbb{C}[E_2, E_4, \chi_{5a}, E_6] \oplus \chi_{5b}\mathbb{C}[E_2, E_4, \chi_{5a}, E_6]$$
$$\oplus \chi_{15}\mathbb{C}[E_2, E_4, \chi_{5a}, E_6] \oplus \chi_{5b}\chi_{15}\mathbb{C}[E_2, E_4, \chi_{5a}, E_6],$$

ここで，χ_{5a}，χ_{5b}，χ_{15} は [10] で定義した重さ 5, 5, 15 のカスプ形式である。また，E_2，E_4，χ_{5a}，E_6 は $\mathbb{C}$ 上代数的独立である。すべての生成元の間の関係式は [10] で与えられている。

□

5 リフティングの予想

自然数 N に対して

$$\Gamma_0^{(1)}(N) := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; c \equiv 0 \bmod N \right\}$$

とし，$\Gamma_0^{(1)}(N)$ に関するウェイト k の 1 変数モジュラー形式のなす空間を $M_k(\Gamma_0^{(1)}(N))$，カスプ形式のなす空間を $S_k(\Gamma_0^{(1)}(N))$ と表す。また，newforms のなす部分空間を $S_k^{new}(\Gamma_0^{(1)}(N))$ と表す。u_N を $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{smallmatrix}\right)$ の作用で定義される Atkin-Lehner involution とし，

$$S_{2k-2}^{new,\pm}(\Gamma_0^{(1)}(N)) = \left\{ f \in S_{2k-2}^{new}(\Gamma_0^{(1)}(N)) \;\middle|\; u_N f = \mp(-1)^k f \right\}$$

と定義する。ここで，$\pm$ は Atkin-Lehner involution の固有値の符号ではなく，関数等式の符号を書く記法になっていることに注意する。このとき，[7] において次の予想を提唱した。

予想 5.1. N は偶数個の異なる素数の積とし，M は N の約数であるとする。

(1) $\omega(M)$ が奇数ならば，次の単射なリフティング写像が存在する：

$$S_{j+2}^{new}(\Gamma_0^{(1)}(M)) \times S_{2k+j-2}^{new}(\Gamma_0^{(1)}(N/M)) \to S_{k,j}(U'(N)).$$

$g \in S_{j+2}^{new}(\Gamma_0^{(1)}(M))$ と $f \in S_{2k+j-2}^{new}(\Gamma_0^{(1)}(N/M))$ のペア (f,g) からのリフト $\iota(f,g) \in S_{k,j}(U'(N))$ に関しては，判別式 N を割る素数 p を除いて

$$L(s, \iota(f,g), Sp) = L(s,f)L(s-k+2, g),$$

が成り立つ。ここで左辺はスピノール L 関数である。

(2) $\omega(M)$ が奇数 (resp. 偶数) ならば，次の単射なリフティング写像が存在する：

$$S_{2k-2}^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(N/M)) \to S_{k,0}(U'(N)).$$

$$(\text{ resp. } S_{2k-2}^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(N/M)) \to S_{k,0}(U'(N))) \text{)}$$

$f \in S_{2k-2}^{new,\pm}(\Gamma_0(M))$ からのリフト $\iota(f) \in S_{k,0}(U'(N))$ に関しては，判別式 N を割る素数 p を除いて

$$L(s, \iota(f), Sp) = \zeta(s-k+1)\zeta(s-k+2)L(s,f)$$

が成り立つ。

□

この予想の根拠を述べる。次元の関係式による根拠と数値実験による根拠が有る。前者は次元公式と newforms の理論的考察によるものであり，後者は計算機実験によるものである。

5.1 次元の関係式による根拠

N を正の整数とする。次のように定義された群 $K(N)$ をレベル N のパラモジュラー群と呼ぶ。

$$K(N) = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & N^{-1}\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix} \cap Sp(2;\mathbb{Q}).$$

パラモジュラー群に関するカスプ形式の空間 $S_{k,j}(K(N))$ の明示的次元公式は，N が素数の場合には Ibukiyama[5]，平方因子を持たないレベルへの拡張は [7] によって行われた。定理 3.1 と同様な明示公式になるがここでは省略する。重要なのは，$S_{k,j}(U'(N))$ と $S_{k,j}(K(N))$ との次元の関係である。

定理 5.2 ([7],Main Theorem 1.2). N は偶数個の異なる素数の積とする。j が非負の偶数で k が 5 以上の整数のとき，次の関係式が成り立つ。

$$\sum_{M|N} (-2)^{\omega(M)} \dim S_{k,j}(K(N/M)) =$$
$$\dim S_{k,j}(U'(N)) - \sum_{M|N,\omega(M)=odd} (\dim S_{j+2}^{new}(\Gamma_0^{(1)}(M)) + \delta_{j0}) \times \dim S_{2k+j-2}^{new}(\Gamma_0^{(1)}(N/M)).$$

ここで，δ_{j0} はクロネッカーデルタを表す。

□

レベル N が素数の場合の定理 5.2 にあたるものは Ibukiyama[5] によって得られていて，パラモジュラーの newforms の考察により両辺の newforms の空間の間の対応予想が提唱された。この対応は，レベル N を平方因子を持たないレベルまで拡張して成立することが期待されるが，両辺に現れるリフティングの未解決な議論が必要で，どのような対応になりうるか元々は分からないのであって，簡単な問題ではまったくない。定理 5.2 が対応の示唆を与えるはずであるが，等式というものは本質よりも余分なものが両辺に足されていても成り立ってしまうのであって，定理 5.2 の関係式が本質を表す表示であるとは限らない。そこで意味を考えなければならない。つまり，

レベルを拡張した場合のパラモジュラーの newforms の議論をし，定理 5.2 の左辺を newforms の空間の次元に書き換えなければならないのである。本稿では詳細の説明は省略するが，論文 [7] では，平方因子を持たないレベルでのパラモジュラーの newforms を定義し，ある仮定の下で，newforms の空間 $S_{k,j}^{new}(K(N))$ の次元は以下の通りになることを示した。

定理 5.3 ([7], Proposition 4.4).

$$\dim S_{k,j}^{new}(K(N)) = \sum_{M|N} (-2)^{\omega(M)} \dim S_{k,j}(K(N/M)) - \delta_{j0} \sum_{M|N, M\neq 1} (-1)^{\omega(M)} \dim S_{2k-2}^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(N/M)).$$

□

これを用いて定理 5.2 を書き直すと以下のようになる。

定理 5.4 ([7]).

$$\begin{aligned}
&\dim S_{k,j}^{new}(K(N)) \\
&= \dim S_{k,j}(U'(N)) - \sum_{\substack{M|N \\ \omega(M)=odd}} \dim S_{j+2}^{new}(\Gamma_0^{(1)}(M)) \times \dim S_{2k+j-2}^{new}(\Gamma_0^{(1)}(N/M)) \\
&\quad - \delta_{j0} \sum_{\substack{M|N \\ \omega(M)=odd}} \dim S_{2k-2}^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(N/M)) \\
&\quad - \delta_{j0} \sum_{\substack{M|N \\ \omega(M)=even}} \dim S_{2k-2}^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(N/M))
\end{aligned}$$

□

この関係式の右辺は，$U'(N)$ に関する newforms の空間 $S_{k,j}^{new}(U'(N))$ がどのように定義されるべきであるかを示唆している。つまり，右辺のマイナスの部分が 1 変数カスプ形式からのリフトとして $S_{k,j}(U'(N))$ の中に入っているのでそれを引けというのである。これが 1 変数カスプ形式からのリフトの予想 5.1 の根拠である。

5.2 予想の数値的根拠

最初に，$j=0$ の場合に限定し，Sugano[13] に従って $S_{k,0}(U'(N))$ 上のヘッケ作用素の定義を振り返る。表記を簡略化するため $\Gamma = U'(N)$ と表すことにする。$m \in \mathbb{N}$ と $f \in S_{k,0}(\Gamma)$ に対し，

$$(T_k(m)f)(Z) := m^{2k-3} \sum_{g\in\Gamma\backslash S_m} \det(CZ+D)^{-k} f(g\cdot Z)$$

と定義する。ここで，

$$S_m := \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \alpha, \delta \in \mathfrak{O},\ \beta \in \mathfrak{A}^{-1},\ \gamma \in \mathfrak{A}, \\ \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\alpha} = \gamma\overline{\delta} + \delta\overline{\gamma} = 0,\ \alpha\overline{\delta} + \beta\overline{\gamma} = m \end{array} \right\}$$

とし，$g \in \Gamma\backslash S_m$ は $\Gamma\backslash S_m$ の完全代表系を動くものとする。p を $p \nmid N$ なる素数とする。ヘッケ固有形式 $f \in S_{k,0}(\Gamma)$ に対し，固有値を

$$T_k(p)f = \lambda(p)f, \qquad T_k(p^2)f = \lambda(p^2)f$$

と表すことにし，

$$H_p(t,f) := t^4 - \lambda(p)t^3 + (\lambda(p)^2 - \lambda(p^2) - p^{2k-4})t^2 - \lambda(p)p^{2k-3}t + p^{4k-6}$$

と定義する。このとき，$H_p(p^{-s},f)$ は f のスピノール L 関数のオイラー p 因子である。

予想 5.1 の数値的根拠を得るために，不定符号四元数環の判別式 N として 1 でない最小値 $N=6$ の場合を，定理 4.3 を応用して計算する。定理 4.3 により各 k に対して $S_{k,0}(U'(6))$ の基底を書くことができる。その上のヘッケ作用素の作用を計算し，固有形式からなる基底に取り換えて固有値を計算し，N を割らない最小の素数 $p=5$ に対し上記 $H_p(t,f)$ を計算する。$T_k(25)$ の計算がつらいところで，ウェイト k が大きくなるにつれて計算は非常に苦しくなるが，計算機での数値計算により次の結果を得た。この結果は予想 5.1 と合致する。

定理 5.5 ([7], Theorem 4.6). $k \leq 11$ とする。g が $S_{2k-2}^{new,-}(SL(2;\mathbb{Z}))$, $S_{2k-2}^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(2))$, $S_{2k-2}^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(3))$ または $S_{2k-2}^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(6))$ に属するヘッケ固有形式ならば，$F \in S_{k,0}(U'(6))$ で

$$H_5(t,F) = (t-5^{k-2})(t-5^{k-1})h_5(t,g)$$

を満たすものが存在する。ここで，$h_5(t,g)$ は $p=5$ での g のヘッケ多項式を表す。

□

計算結果の詳細を以下に記述する。

$\boxed{\text{ウェイト } 4}$ $\dim S_{4,0}(U'(6)) = 1$ である。$\phi_1 = {E_2}^2 - E_4$ とおいて計算すると

$$T_4(5)\phi_1 = 156\phi_1, \qquad T_4(5^2)\phi_1 = 16561\phi_1$$

であり

$$H_5(t,\phi_1) = (t-5^2)(t-5^3)(t^2-6t+5^5).$$

となる。一方で，1 変数については
$\dim S_6^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(2)) = \dim S_6^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(2)) = \dim S_6^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(3)) = \dim S_6^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(6)) = 0,$
であり，

$$S_6^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(3)) = \mathbb{C}f_1 : \qquad f_1 = q - 6q^2 + 9q^3 + 4q^4 + 6q^5 + O(q^6),$$
$$S_6^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(6)) = \mathbb{C}f_2 : \qquad f_2 = q + 4q^2 - 9q^3 + 16q^4 - 66q^5 + O(q^6)$$

である。従って，$h_5(t,f_1)$ は f_1 の 5 におけるヘッケ多項式とするとき，

$$H_5(t,\phi_1) = (t-5^2)(t-5^3)h_5(t,f_1)$$

という関係にあることが分かる。

$\boxed{\textbf{ウェイト 5}}$ $\dim S_{5,0}(U'(6))=2$ である。この空間は $\phi_1=\chi_{5a}$ と $\phi_2=\chi_{5b}$ で生成され，また，ϕ_1 と ϕ_2 はヘッケ固有形式である。計算すると固有値は

$$T_5(5)\phi_1=1140\phi_1,\qquad T_5(5^2)\phi_1=835225\phi_1,$$
$$T_5(5)\phi_2=540\phi_2,\qquad T_5(5^2)\phi_2=277225\phi_2$$

であり

$$H_5(t,\phi_1)=(t-5^3)(t-5^4)(t^2-390t+5^7)$$
$$H_5(t,\phi_2)=(t-5^3)(t-5^4)(t^2+210t+5^7).$$

となる。一方で，1 変数については

$$\begin{aligned}
&S_8^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(2))=\mathbb{C}f_1: && f_1=q-8q^2+12q^3+64q^4-210q^5+O(q^6),\\
&S_8^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(2))=\{0\}: && \\
&S_8^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(3))=\mathbb{C}f_2: && f_2=q+6q^2-27q^3-92q^4+390q^5+O(q^6),\\
&S_8^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(3))=\{0\}: && \\
&S_8^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(6))=\mathbb{C}f_3: && f_3=q+8q^2+27q^3+64q^4-114q^5+O(q^6),\\
&S_8^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(6))=\{0\}: &&
\end{aligned}$$

である。従って，

$$H_5(t,\phi_1)=(t-5^3)(t-5^4)h_5(t,f_2)$$
$$H_5(t,\phi_2)=(t-5^3)(t-5^4)h_5(t,f_1)$$

という関係にあることが分かる。

$\boxed{\textbf{ウェイト 6}}$ $\dim S_{6,0}(U'(6))=2$ である。この空間は

$$\phi_1=225{E_2}^3-247E_2E_4+22E_6,\quad \phi_2=70{E_2}^3-39E_2E_4-31E_6$$

で生成され，また，ϕ_1 と ϕ_2 はヘッケ固有形式である。計算すると固有値は

$$T_6(5)\phi_1=4620\phi_1,\qquad T_6(5^2)\phi_1=13785025\phi_1,$$
$$T_6(5)\phi_2=2220\phi_2,\qquad T_6(5^2)\phi_2=6369025\phi_2$$

であり

$$H_5(t,\phi_1)=(t-5^4)(t-5^5)(t^2-870t+5^9),$$
$$H_5(t,\phi_2)=(t-5^4)(t-5^5)(t^2+1530t+5^9).$$

となる。一方で，1 変数については

$$
\begin{aligned}
&S_{10}^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(2)) = \mathbb{C}f_1 : && f_1 = q + 16q^2 - 156q^3 + 256q^4 + 870q^5 + O(q^6)\\
&S_{10}^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(2)) = \{0\} : && \\
&S_{10}^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(3)) = \mathbb{C}f_2 : && f_2 = q + 18q^2 + 81q^3 - 188q^4 - 1530q^5 + O(q^6)\\
&S_{10}^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(3)) = \mathbb{C}f_3 : && f_3 = q - 36q^2 - 81q^3 + 784q^4 - 1314q^5 + O(q^6)\\
&S_{10}^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(6)) = \mathbb{C}f_4 : && f_4 = q - 16q^2 + 81q^3 + 256q^4 + 2694q^5 + O(q^6)\\
&S_{10}^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(6)) = \{0\} : &&
\end{aligned}
$$

である。従って，

$$
\begin{aligned}
H_5(t,\phi_1) &= (t-5^4)(t-5^5)h_5(t,f_1)\\
H_5(t,\phi_2) &= (t-5^4)(t-5^5)h_5(t,f_2)
\end{aligned}
$$

という関係にあることが分かる。

$\boxed{\textbf{ウェイト 7}}$ $\dim S_{7,0}(U'(6)) = 2$ である。この空間は $\phi_1 = E_2\chi_{5a}$ と $\phi_2 = E_2\chi_{5b}$ で生成され，また，ϕ_1 と ϕ_2 はヘッケ固有形式である。計算すると固有値は

$$
\begin{aligned}
T_7(5)\phi_1 &= 13380\phi_1, & T_7(5^2)\phi_1 &= 172290025\phi_1,\\
T_7(5)\phi_2 &= 7020\phi_2, & T_7(5^2)\phi_2 &= 161796025\phi_2
\end{aligned}
$$

であり，

$$
\begin{aligned}
H_5(t,\phi_1) &= (t-5^5)(t-5^6)(t^2+5370t+5^{11}),\\
H_5(t,\phi_2) &= (t-5^5)(t-5^6)(t^2+11730t+5^{11}).
\end{aligned}
$$

となる。一方で，1 変数については

$$
\begin{aligned}
&S_{12}^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(2)) = \{0\} : && \\
&S_{12}^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(2)) = \{0\} : && \\
&S_{12}^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(3)) = \mathbb{C}f_1 : && f_1 = q + 78q^2 - 243q^3 + 4036q^4 - 5370q^5 + O(q^6)\\
&S_{12}^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(3)) = \{0\} : && \\
&S_{12}^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(6)) = \mathbb{C}f_2 \oplus \mathbb{C}f_3 : && f_2 = q + 32q^2 + 243q^3 + 1024q^4 + 3630q^5 + O(q^6)\\
& && f_3 = q - 32q^2 - 243q^3 + 1024q^4 + 5766q^5 + O(q^6)\\
&S_{12}^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(6)) = \mathbb{C}f_4 : && f_4 = q - 32q^2 + 243q^3 + 1024q^4 - 11730q^5 + O(q^6)
\end{aligned}
$$

である。従って，

$$
H_5(t,\phi_1) = (t-5^5)(t-5^6)h_5(t,f_1)
$$

$$H_5(t,\phi_2) = (t-5^5)(t-5^6)h_5(t,f_4)$$

という関係にあることが分かる。

ウェイト 8 $\dim S_{8,0}(U'(6)) = 3$ である。この空間は以下の 3 つで生成される。

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= 110043{E_2}^4 - 218010{E_2}^2E_4 - 2728E_2E_6 + 110695{E_4}^2,\\
\phi_2 &= -4(69719 - 6427\sqrt{1969}){E_2}^4 + 13(59939 - 3733\sqrt{1969}){E_2}^2E_4\\
&\qquad + 682(13+\sqrt{1969})E_2E_6 - 22139(23-\sqrt{1969}){E_4}^2,\\
\phi_3 &= -4(69719 + 6427\sqrt{1969}){E_2}^4 + 13(59939 + 3733\sqrt{1969}){E_2}^2E_4\\
&\qquad + 682(13-\sqrt{1969})E_2E_6 - 22139(23+\sqrt{1969}){E_4}^2,
\end{aligned}$$

これらはヘッケ固有形式であり，

$$\begin{aligned}
&T_6(5)\phi_1 = 36300\phi_1, && T_6(5^2)\phi_1 = 4018080625\phi_1,\\
&T_6(5)\phi_2 = (114108+384\sqrt{1969})\phi_2, && T_6(5^2)\phi_2 = (8716867153+51634944\sqrt{1969})\phi_2,\\
&T_6(5)\phi_3 = (114108-384\sqrt{1969})\phi_3, && T_6(5^2)\phi_3 = (8716867153-51634944\sqrt{1969})\phi_3
\end{aligned}$$

であって

$$\begin{aligned}
H_5(t,\phi_1) &= (t-5^6)(t-5^7)(t^2+57450t+5^{13}),\\
H_5(t,\phi_2) &= (t-5^6)(t-5^7)(t^2-(20358+384\sqrt{1969})t+5^{13}),\\
H_5(t,\phi_3) &= (t-5^6)(t-5^7)(t^2-(20358-384\sqrt{1969})t+5^{13}).
\end{aligned}$$

となる。一方で，1 変数については

$$S_{14}^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(2)) = \mathbb{C}f_1: \qquad f_1 = q+64q^2+1236q^3+4096q^4-57450q^5+O(q^6)$$

$$S_{14}^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(2)) = \mathbb{C}f_2: \qquad f_2 = q-64q^2-1836q^3+4096q^4+3990q^5+O(q^6)$$

$$S_{14}^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(3)) = \mathbb{C}f_3\oplus\mathbb{C}f_4:$$

$$f_3 = q+(-27+3\sqrt{1969})q^2+729q^3$$

$$+(10258-162\sqrt{1969})q^4+(20358+384\sqrt{1969})q^5+O(q^6),$$

$$f_4 = q+(-27-3\sqrt{1969})q^2+729q^3$$

$$+(10258+162\sqrt{1969})q^4+(20358-384\sqrt{1969})q^5+O(q^6)$$

$$S_{14}^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(3)) = \mathbb{C}f_5: \qquad f_5 = q-12q^2-729q^3-8048q^3-30210q^5+O(q^6)$$

$$S_{14}^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(6)) = \mathbb{C}f_6 : \qquad f_6 = q + 64q^2 - 729q^3 + 4096q^4 + 54654q^5 + O(q^6)$$
$$S_{14}^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(6)) = \{0\} :$$

である。従って，

$$H_5(t,\phi_1) = (t-5^6)(t-5^7)h_5(t,f_1)$$
$$H_5(t,\phi_2) = (t-5^6)(t-5^7)h_5(t,f_3)$$
$$H_5(t,\phi_3) = (t-5^6)(t-5^7)h_5(t,f_4)$$

という関係にあることが分かる。

$\boxed{\text{ウェイト 9}}$ $\dim S_{9,0}(U'(6)) = 4$ である。この空間は以下の 4 つで生成される。

$$\phi_1 = -13(E_4 - {E_2}^2)\chi_{5b} + 2{E_2}^2\chi_{5b}, \qquad \phi_2 = -52(E_4 - {E_2}^2)\chi_{5a} + 3{E_2}^2\chi_{5a},$$
$$\phi_3 = 169(E_4 - {E_2}^2)\chi_{5a} + 16{E_2}^2\chi_{5a}, \qquad \phi_4 = 65(E_4 - {E_2}^2)\chi_{5b} + 3{E_2}^2\chi_{5b}.$$

これらはヘッケ固有形式であり

$$T_9(5)\phi_1 = 559260\phi_1 \qquad T_9(5)\phi_2 = 749460\phi_2,$$
$$T_9(5)\phi_3 = 353940\phi_3 \qquad T_9(5)\phi_4 = -33540\phi_4,$$
$$T_9(5^2)\phi_1 = 203206513225\phi_1, \qquad T_9(5^2)\phi_2 = 362968807225\phi_2,$$
$$T_9(5^2)\phi_3 = 111952039225\phi_3, \qquad T_9(5^2)\phi_4 = 10314697225\phi_4$$

であって

$$H_5(t,\phi_1) = (t-5^7)(t-5^8)(t^2 - 90510t + 5^{15})$$
$$H_5(t,\phi_2) = (t-5^7)(t-5^8)(t^2 - 280710t + 5^{15})$$
$$H_5(t,\phi_3) = (t-5^7)(t-5^8)(t^2 + 114810t + 5^{15})$$
$$H_5(t,\phi_4) = t^4 + 33540t^3 - 15293281250t^2 + 33540\cdot 5^{15}t + 5^{30}.$$

となる。一方で，1 変数については

$$S_{16}^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(2)) = \mathbb{C}f_1 : \qquad f_1 = q - 128q^2 + 6252q^3 + 16384q^4 + 90510q^5 + O(q^6)$$
$$S_{16}^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(2)) = \{0\} :$$
$$S_{16}^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(3)) = \mathbb{C}f_2 : \qquad f_2 = q - 234q^2 - 2187q^3 + 21988q^4 + 280710q^5 + O(q^6)$$
$$S_{16}^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(3)) = \mathbb{C}f_3 : \qquad f_3 = q - 72q^2 + 2187q^3 - 27584q^4 - 221490q^5 + O(q^6)$$
$$S_{16}^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(6)) = \mathbb{C}f_4 \oplus \mathbb{C}f_5 : \qquad f_4 = q + 128q^2 + 2187q^3 + 16384q^4 + 77646q^5 + O(q^6),$$
$$f_5 = q - 128q^2 - 2187q^3 + 16384q^4 - 314490q^5 + O(q^6)$$
$$S_{16}^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(6)) = \mathbb{C}f_6 : \qquad f_6 = q + 128q^2 - 2187q^3 + 16384q^4 - 114810q^5 + O(q^6)$$

である。従って,

$$H_5(t,\phi_1) = (t-5^7)(t-5^8)h_5(t,f_1)$$
$$H_5(t,\phi_2) = (t-5^7)(t-5^8)h_5(t,f_2)$$
$$H_5(t,\phi_3) = (t-5^7)(t-5^8)h_5(t,f_6)$$

という関係にあることが分かる。一方で,$H_5(t,\phi_4)$ はこのような関係を持たず,また,$H_5(t,\phi_4)$ の根の絶対値はすべて $5^{15/2}$ である。

ウェイト 10 $\dim S_{10,0}(U'(6)) = 6$ である。この空間は以下の 6 つで生成される。

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= -1141885{E_2}^5 + 2578420{E_2}^3E_4 - 395560{E_2}^2E_6 \\
&\quad - 1413347E_2{E_4}^2 + 372372E_4E_6 + 6519398400{\chi_{5a}}^2 \\
\phi_2 &= \chi_{5a}\chi_{5b} \\
\phi_3 &= -11881{E_2}^5 - 16523{E_2}^3E_4 + 67859{E_2}^2E_6 \\
&\quad + 27040E_2{E_4}^2 - 66495E_4E_6 + 358566912{\chi_{5a}}^2 \\
\phi_4 &= -1005445{E_2}^5 + 2058550{E_2}^3E_4 - 56265{E_2}^2E_6 \\
&\quad - 1045603E_2{E_4}^2 + 48763E_4E_6 - 814924800{\chi_{5a}}^2 \\
\phi_5 &= 5(8553171360955 - 88807370233\sqrt{14569}){E_2}^5 \\
&\quad + 65(-1258629706843 + 16378550233\sqrt{14569}){E_2}^3E_4 \\
&\quad + 1705(-1426727601 - 93536405\sqrt{14569}){E_2}^2E_6 \\
&\quad + 1352(29037896401 - 460871627\sqrt{14569})E_2{E_4}^2 \\
&\quad + 31031(71490083 + 5220879\sqrt{14569})E_4E_6 \\
&\quad + 814924800(-57532981 + 1170775\sqrt{14569}){\chi_{5a}}^2 \\
\phi_6 &= 5(8553171360955 + 88807370233\sqrt{14569}){E_2}^5 \\
&\quad + 65(-1258629706843 - 16378550233\sqrt{14569}){E_2}^3E_4 \\
&\quad + 1705(-1426727601 + 93536405\sqrt{14569}){E_2}^2E_6 \\
&\quad + 1352(29037896401 + 460871627\sqrt{14569})E_2{E_4}^2 \\
&\quad + 31031(71490083 - 5220879\sqrt{14569})E_4E_6 \\
&\quad + 814924800(-57532981 - 1170775\sqrt{14569}){\chi_{5a}}^2
\end{aligned}$$

これらはヘッケ固有形式であり,固有値は

$$\begin{aligned}
T_{10}(5)\phi_1 &= 3598860\phi_1, & T_{10}(5^2)\phi_1 &= 8331662440225\phi_1, \\
T_{10}(5)\phi_2 &= 2988900\phi_2, & T_{10}(5^2)\phi_2 &= 5742986100625\phi_2, \\
T_{10}(5)\phi_3 &= 1317900\phi_3, & T_{10}(5^2)\phi_3 &= 2462729550625\phi_3, \\
T_{10}(5)\phi_4 &= -88980\phi_4, & T_{10}(5^2)\phi_4 &= -1314838418975\phi_4,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T_{10}(5)\phi_5 &= (2535180 + 10560\sqrt{14569})\phi_5,\\
T_{10}(5^2)\phi_5 &= (5924648411425 + 28793001600\sqrt{14569})\phi_5,\\
T_{10}(5)\phi_6 &= (2535180 - 10560\sqrt{14569})\phi_6,\\
T_{10}(5^2)\phi_6 &= (5924648411425 - 28793001600\sqrt{14569})\phi_6
\end{aligned}
$$

であって

$$
\begin{aligned}
H_5(t,\phi_1) &= (t-5^8)(t-5^9)(t^2-1255110t+5^{17}),\\
H_5(t,\phi_2) &= (t-5^8)(t-5^9)(t^2-645150t+5^{17}),\\
H_5(t,\phi_3) &= (t-5^8)(t-5^9)(t^2+1025850t+5^{17}),\\
H_5(t,\phi_4) &= t^4+88980t^3+1170167968750t^2+88980\cdot 5^{17}t+5^{34},\\
H_5(t,\phi_5) &= (t-5^8)(t-5^9)(t^2-(191430+10560\sqrt{14569})t+5^{17}),\\
H_5(t,\phi_6) &= (t-5^8)(t-5^9)(t^2-(191430-10560\sqrt{14569})t+5^{17}).
\end{aligned}
$$

となる。一方で，1 変数については

$$
\begin{aligned}
&S_{18}^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(2)) = \mathbb{C}f_1 : && f_1 = q+256q^2+6084q^3+65536q^4+1255110q^5+O(q^6)\\
&S_{18}^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(2)) = \{0\} : &&\\
&S_{18}^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(3)) = \mathbb{C}f_2 \oplus \mathbb{C}f_3 : &&
\end{aligned}
$$

$$
f_2 = q+(297-3\sqrt{14569})q^2+6561q^3+(88258-1782\sqrt{14569})q^4
$$

$$
+(191430+10560\sqrt{14569})q^5+O(q^6)
$$

$$
f_3 = q+(297+3\sqrt{14569})q^2+6561q^3+(88258+1782\sqrt{14569})q^4
$$

$$
+(191430-10560\sqrt{14569})q^5+O(q^6)
$$

$$
\begin{aligned}
&S_{18}^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(3)) = \mathbb{C}f_4 : && f_4 = q+204q^2-6561q^3-89456q^4-163554q^5+O(q^6)\\
&S_{18}^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(6) = \mathbb{C}f_5 \oplus \mathbb{C}f_6 : && f_5 = q-256q^2+6561q^3+65536q^4-72186q^5+O(q^6),\\
& && f_6 = q+256q^2-6561q^3+65536q^4-199650q^5+O(q^6)\\
&S_{18}^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(6)) = \mathbb{C}f_7 : && f_7 = q-256q^2-6561q^3+65536q^4+645150q^5+O(q^6)\\
&S_{18}(SL_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}f_8 : && f_8 = q-528q^2-4284q^3+147712q^4-1025850q^5+O(q^6)
\end{aligned}
$$

である。従って，

$$
\begin{aligned}
H_5(t,\phi_1) &= (t-5^8)(t-5^9)h_5(t,f_1)\\
H_5(t,\phi_2) &= (t-5^8)(t-5^9)h_5(t,f_7)\\
H_5(t,\phi_3) &= (t-5^8)(t-5^9)h_5(t,f_8)
\end{aligned}
$$

$$H_5(t,\phi_5)=(t-5^8)(t-5^9)h_5(t,f_2)$$
$$H_5(t,\phi_6)=(t-5^8)(t-5^9)h_5(t,f_3)$$

という関係にあることが分かる。一方で，$H_5(t,\phi_4)$ はこのような関係を持たず，また，$H_5(t,\phi_4)$ の根の絶対値はすべて $5^{17/2}$ である。

ウェイト 11 $\dim S_{11,0}(U'(6))=6$ とする。この空間は以下の 6 つで生成される。

$$\begin{aligned}
\phi_1&=(-168651{E_2}^3+209937E_2E_4-40238E_6)\chi_{5b},\\
\phi_2&=(284240{E_2}^3-307983E_2E_4+27280E_6)\chi_{5b},\\
\phi_3&=(38070{E_2}^3-38727E_2E_4+1705E_6)\chi_{5a}\\
\phi_4&=(-5160{E_2}^3+3848E_2E_4+1705E_6)\chi_{5b}\\
\phi_5&=(15(648516161263+489095155\sqrt{87481}){E_2}^3\\
&\qquad+13(925073695727+448963853\sqrt{87481})E_2E_4\\
&\qquad+3410(-470385337-3317995\sqrt{87481})E_6)\chi_{5a}\\
\phi_6&=(15(648516161263-489095155\sqrt{87481}){E_2}^3\\
&\qquad+13(925073695727-448963853\sqrt{87481})E_2E_4\\
&\qquad+3410(-470385337+3317995\sqrt{87481})E_6)\chi_{5a}
\end{aligned}$$

これらはヘッケ固有形式であり，固有値は

$$\begin{aligned}
T_{11}(5)\phi_1&=18265500\phi_1, & T_{11}(5^2)\phi_1&=214947093765625\phi_1,\\
T_{11}(5)\phi_2&=5869260\phi_2, & T_{11}(5^2)\phi_2&=61035253963225\phi_2,\\
T_{11}(5)\phi_3&=5029620\phi_3, & T_{11}(5^2)\phi_3&=10086149610025\phi_3,\\
T_{11}(5)\phi_4&=-222420\phi_4, & T_{11}(5^2)\phi_4&=-25141613327975\phi_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{11}(5)\phi_5&=(14726820+12480\sqrt{87481})\phi_5,\\
T_{11}(5^2)\phi_5&=(149477240554800+221331427200\sqrt{87481})\phi_5,\\
T_{11}(5)\phi_6&=(14726820-12480\sqrt{87481})\phi_6,\\
T_{11}(5^2)\phi_6&=(149477240554800-221331427200\sqrt{87481})\phi_6
\end{aligned}$$

であって

$$\begin{aligned}
H_5(t,\phi_1)&=(t-5^9)(t-5^{10})(t^2-6546750t+5^{19}),\\
H_5(t,\phi_2)&=(t-5^9)(t-5^{10})(t^2+5849490t+5^{19}),\\
H_5(t,\phi_3)&=t^4-5029620t^3+11396230468750t^2-5029620\cdot5^{19}t+5^{38},\\
H_5(t,\phi_4)&=t^4+222420t^3+21376386718750t^2+222420\cdot5^{19}t+5^{38},\\
H_5(t,\phi_5)&=(t-5^9)(t-5^{10})(t^2-(3008070+12480\sqrt{87481})t+5^{19}),
\end{aligned}$$

$$H_5(t,\phi_6) = (t-5^9)(t-5^{10})(t^2-(3008070-12480\sqrt{87481})t+5^{19}).$$

となる。一方で，1 変数については

$$\begin{aligned}
&S_{20}^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(2)) = \mathbb{C}f_1 : && f_1 = q-512q^2-13092q^3+262144q^4+6546750q^5+O(q^6)\\
&S_{20}^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(2)) = \mathbb{C}f_2 : && f_2 = q+512q^2-53028q^3+262144q^4-5556930q^5+O(q^6)\\
&S_{20}^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(3)) = \mathbb{C}f_3 \oplus \mathbb{C}f_4 :
\end{aligned}$$

$$f_3 = q+(351+3\sqrt{87481})q^2-19683q^3+(386242+2106\sqrt{87481})q^4$$

$$+(3008070+12480\sqrt{87481})q^5+O(q^6)$$

$$f_4 = q+(351-3\sqrt{87481})q^2-19683q^3+(386242-2106\sqrt{87481})q^4$$

$$+(3008070-12480\sqrt{87481})q^5+O(q^6)$$

$$\begin{aligned}
&S_{20}^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(3)) = \mathbb{C}f_5 : && f_5 = q-1104q^2+19683q^3+694528q^4+3516270q^5+O(q^6)\\
&S_{20}^{new,+}(\Gamma_0^{(1)}(6)) = \mathbb{C}f_6 \oplus \mathbb{C}f_7 : && f_6 = q-512q^2-19683q^3+262144q^4-3732474q^5+O(q^6),\\
& && f_7 = q+512q^2+19683q^3+262144q^4+1953390q^5+O(q^6).\\
&S_{20}^{new,-}(\Gamma_0^{(1)}(6)) = \mathbb{C}f_8 : && f_8 = q-512q^2+19683q^3+262144q^4-5849490q^5+O(q^6)
\end{aligned}$$

である。従って，

$$\begin{aligned}
H_5(t,\phi_1) &= (t-5^9)(t-5^{10})h_5(t,f_1)\\
H_5(t,\phi_2) &= (t-5^9)(t-5^{10})h_5(t,f_8)\\
H_5(t,\phi_5) &= (t-5^9)(t-5^{10})h_5(t,f_3)\\
H_5(t,\phi_6) &= (t-5^9)(t-5^{10})h_5(t,f_4)
\end{aligned}$$

という関係にあることが分かる。一方で，$H_5(t,\phi_3)$ と $H_5(t,\phi_4)$ はこのような関係を持たず，また，$H_5(t,\phi_3)$ と $H_5(t,\phi_4)$ の根の絶対値はすべて $5^{19/2}$ である。

参考文献

[1] T. Arakawa, *Automorphic forms on quaternion unitary groups of degree 2*, Master thesis, University of Tokyo (1975) (in Japanese).

[2] K. Hashimoto and T. Ibukiyama, *On relations of dimensions of automorphic forms of $Sp(2,\mathbb{R})$ and its compact twist $Sp(2)$ (II)*, Automorphic forms and number theory, Adv. Stud. Pure Math. **7** (1985) 31–102.

[3] Y. Hirai, *On Eisenstein series on quaternion unitary groups of degree 2*, J. Math. Soc. Japan **51** (1999) 93–128.

[4] T. Ibukiyama, *On symplectic Euler factors of genus two*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **30** (1984), 587–614.

[5] T. Ibukiyama, *On relations of dimensions of automorphic forms of $Sp(2, \mathbb{R})$ and its compact twist $Sp(2)$ (I)*, Automorphic forms and number theory, Adv. Stud. Pure Math. **7** (1985) 7–30.

[6] T. Ibukiyama, *Paramodular forms and compact twist*, in Automorphic Forms on GSp(4) (Proceedings of the 9th Autumn Workshop on Number Theory; M. Furusawa, ed.) (2007) 37–48.

[7] T. Ibukiyama and H. Kitayama, *Dimension formulas of paramodular forms of squarefree level and comparison with inner twist*, J. Math. Soc. Japan, accepted.

[8] Y. Ihara, *On certain arithmetical Dirichlet series*, J. Math. Soc. Japan, **16** (1964) 214–225.

[9] H. Kitayama, *An explicit dimension formula for Siegel cusp forms with respect to the non-split symplectic groups*, J. Math. Soc. Japan **63** (2011) 1263–1310.

[10] H. Kitayama, *On the graded ring of Siegel modular forms of degree two with respect to a non-split symplectic group*, Internat. J. Math. **23** (2012).

[11] V. Platonov and A. Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*, Academic Press (1994).

[12] G. Shimura, *Arithmetic of alternating forms and quaternion hermitian forms*, J. Math. Soc. Japan **15** (1963) 33-65.

[13] T. Sugano, *On holomorphic cusp forms on quaternion unitary groups of degree 2*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA Math. **31** (1984) 521–568.